

ISTITUTO OMNICOMPRESIVO "BERNARDINO DI BETTO"
ESAME DI STATO CONCLUSIVO DEL PRIMO CICLO D'ISTRUZIONE
Anno Scolastico 2013-2014
PROVA SCRITTA DI MATEMATICA (Prova n°1)

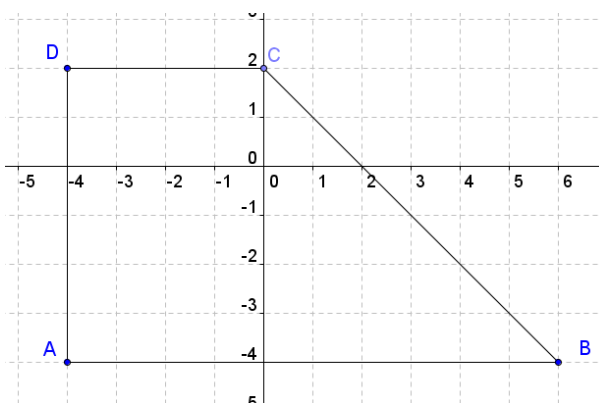
QUESITO N°1

In un sistema di riferimento cartesiano (1 u = 1 cm):

- rappresenta i seguenti punti: $A(-4;-4)$, $B(6;-4)$, $C(0;2)$ e $D(-4;2)$.
- Unisci i punti nell'ordine dato. Quale poligono hai ottenuto? Motiva la tua risposta. Calcola area e perimetro del poligono.
- Descrivi il solido ottenuto dalla rotazione di 360° del quadrilatero intorno al segmento \overline{DC} . Calcola il volume e l'area della superficie totale del solido.
- Supponendo che il solido sia fatto di ferro ($P_s = 7,85 \text{ g/cm}^3$), qual è il suo peso in kg?
- Scrivi le equazioni delle quattro rette passanti per i quattro lati del quadrilatero (\overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} e \overline{DA}).

Soluzione

a.



b. Si ottiene un trapezio rettangolo. È un trapezio perché è un quadrilatero con due lati paralleli, \overline{DC} e \overline{AB} . I due lati sono paralleli perché appartengono a due rette parallele. Infatti la retta che contiene i punti D e C, entrambi di ordinata uguale a 2, è parallela all'asse delle ascisse, così come la retta che contiene i punti A e B, entrambi di ordinata -4 . Il trapezio è rettangolo perché uno dei lati, \overline{AD} , appartiene ad una retta parallela all'asse delle ordinate e quindi perpendicolare alle rette che contengono i due lati \overline{DC} e \overline{AB} . Si formano in questo modo due angoli retti in \hat{A} e in \hat{D} . I lati del poligono misurano:

$$\overline{AB} = |x_A - x_B| = |-4 - 6| = 10 \text{ cm};$$

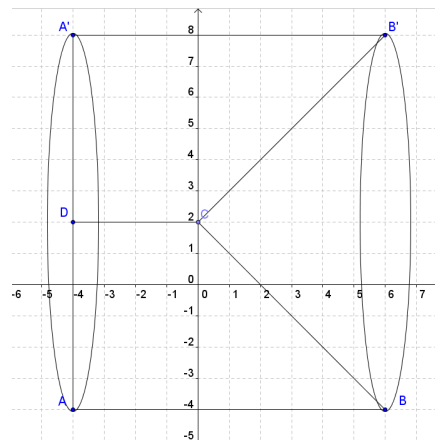
$$\overline{AD} = |y_A - y_D| = |-4 - 2| = 6 \text{ cm, che è uguale anche all'altezza del trapezio};$$

$$\overline{DC} = |x_D - x_C| = |-4 - 0| = 4 \text{ cm};$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(6 - 0)^2 + (-4 - 2)^2} = \sqrt{36 + 36} = 6\sqrt{2} \cong 8,5 \text{ cm}.$$

Il perimetro del trapezio è $p = 10 + 6 + 4 + 8,5 = 28,5 \text{ cm}$. L'area è $A = \frac{(B+b) \times h}{2} = \frac{(10+4) \times 6}{2} = 42 \text{ cm}^2$.

c. Ruotando il trapezio intorno al lato \overline{DC} si ottiene un cilindro con una cavità conica.



Il volume del solido si ottiene facendo la differenza tra quello del cilindro e quello del cono:

$$V_{TOT} = V_{Cilindro} - V_{Cono} = \pi r^2 h - \frac{\pi r^2 h}{3} = \pi 6^2 \times 10 - \frac{\pi 6^2 \times 6}{3} = 360\pi - 72\pi = 288\pi \text{ cm}^3.$$

L'area del solido è invece data dalla somma dell'area di una base del cilindro e quella laterale sia del cilindro che del cono:

$$A_{TOT} = A_{base} + A_{LatCilindro} + A_{LatCono} = \pi r^2 + 2\pi r h + \pi r a = \pi 6^2 + 2\pi \times 6 \times 10 + \pi \times 6 \times 8,5 = 36\pi + 120\pi + 51\pi = 207\pi \text{ cm}^2.$$

d. Il peso è $P = P_s \times V = 7,85 \times 288 \times 3,14 = 7098,912 \text{ g}$, cioè circa 7 kg.

e. Le rette che contengono i lati \overline{AB} , \overline{CD} e \overline{DA} sono parallele agli assi, quindi $\overline{AB}: y = -4$, $\overline{CD}: y = 2$ e $\overline{DA}: x = -4$. La retta che contiene il lato \overline{CB} è invece una retta generica la cui equazione è del tipo $y = mx + q$. Per calcolare il valore del coefficiente angolare e del termine noto procediamo sostituendo all'equazione generica le coordinate dei due punti C e B, appartenenti alla retta. Si ottiene quindi: $2 = q$ e $-4 = 6m + q$, da cui $-4 = 6m + 2 \Rightarrow 6m = -6 \Rightarrow m = -1$. L'equazione della retta passante per C e B è $y = -x + 2$.

QUESITO N°2

Risolvi le equazioni, verifica la prima e imposta un'equazione risolutiva per risolvere il problema.

a. $\frac{3x-5}{3} - \frac{2x-8}{5} = \frac{x-2}{3} + \frac{1}{15}$

b. $(2-3x)^2 - (1+3x)(3x-1) + 1 = 2(x-1) - 17x$

c. Verifica l'equazione a).

d. Anna, Carla e Maria hanno complessivamente 36 anni. Sapendo che l'età di Maria è il doppio di quella di Anna, mentre l'età di Anna è $\frac{2}{3}$ dell'età di Carla, calcola l'età delle tre amiche.

Soluzione

a. $\frac{3x-5}{3} - \frac{2x-8}{5} = \frac{x-2}{3} + \frac{1}{15} \Rightarrow 15x - 25 - 6x + 24 = 5x - 10 + 1 \Rightarrow 15x - 6x - 5x = 25 - 24 - 10 + 1 \Rightarrow 4x = -8 \Rightarrow x = -2$

b. $(2-3x)^2 - (1+3x)(3x-1) + 1 = 2(x-1) - 17x \Rightarrow 4 - 12x + 9x^2 - 9x^2 + 1 + 1 = 2x - 2 - 17x \Rightarrow -12x - 2x + 17x = -4 - 1 - 1 - 2 \Rightarrow 3x = -8 \Rightarrow x = -\frac{8}{3}$

c. $\frac{-6-5}{3} - \frac{-4-8}{5} = \frac{-2-2}{3} + \frac{1}{15} \Rightarrow -55 + 36 = -20 + 1 \Rightarrow -19 = -19$

d. Indichiamo con x l'età di Carla. L'età di Anna sarà quindi $\frac{2}{3}x$ e quella di Maria $2 \times \frac{2}{3}x = \frac{4}{3}x$. La somma delle età delle tre ragazze è esprimibile con la seguente equazione di primo grado, dove l'incognita è l'età di Carla:

$$x + \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}x = 36 \Rightarrow 3x + 2x + 4x = 108 \Rightarrow 9x = 108 \Rightarrow x = 12 \text{ anni (età di Carla). L'età di Anna è quindi}$$

$$\frac{2}{3} \times 12 = 8 \text{ anni e quella di Maria } 8 \times 2 = 16 \text{ anni.}$$

QUESITO N°3

Il suono si propaga con moto rettilineo uniforme e la sua velocità varia a seconda dei mezzi in cui si propaga. Tale velocità è di 340 m/s nell'aria.

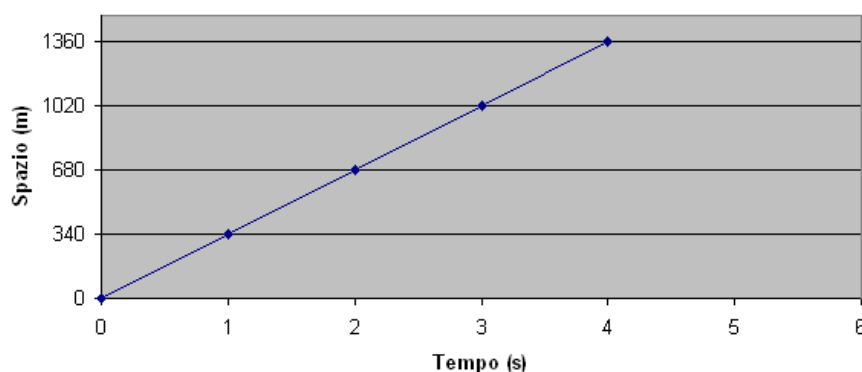
- Cosa significa moto rettilineo uniforme?
- Costruisci il diagramma orario del moto del suono, spazio ($s = y$) in funzione del tempo ($t = x$), scegliendo un'opportuna unità di misura. Che tipo di proporzionalità esiste tra spazio e tempo. Motiva la tua risposta.
- Durante un temporale si vede cadere un fulmine in lontananza e dopo 30 secondi si sente il tuono. A quanti km è caduto il fulmine tenendo presente la velocità di propagazione del suono in aria? Quanto tempo impiegherà il tuono per percorrere 1,7 km?
- Il rapporto tra la velocità di un corpo e quella del suono nello stesso mezzo è detto Mach. L'aereo da trasporto supersonico Concorde aveva una velocità di crociera di 2179 km/h ad un'altezza di più di 15000 m, dove la velocità del suono è di circa 295 m/s. Sapresti calcolare a quanti Mach viaggiava il Concorde?

Soluzione

a. Moto rettilineo uniforme significa che un corpo si muove con traiettoria rettilinea e velocità costante.

b. L'equazione oraria del moto del suono è $s = vt = 340t$, cioè $y = 340x$.

Diagramma orario del moto del suono



Tra spazio e tempo esiste una proporzionalità diretta, infatti il grafico ottenuto è una semiretta uscente dall'origine e il rapporto tra spazio e tempo è costante e corrisponde, appunto, alla velocità del suono.

c. Basta applicare l'equazione oraria del moto: $s = vt = 340 \times 30 = 10200$ m, cioè 10,2 km. Nel secondo quesito,

$$\text{invece: } t = \frac{s}{v} = \frac{1700}{340} = 5 \text{ s.}$$

d. Per calcolare a quanti Mach viaggiava il Concorde è sufficiente fare il rapporto tra la velocità dell'aereo e quella del suono. Bisogna, però, fare prima un'equivalenza: $v = 2179 \text{ km/h} = 2179 : 3,6 \cong 605,28 \text{ m/s}$. Quindi

$$\frac{v_{\text{Concorde}}}{v_{\text{Suono}}} = \frac{605,28}{295} = 2,05 \text{ Mach.}$$

QUESITO N°4

Un'indagine statistica, sul numero di libri letti in un anno da un campione di studenti, ha fornito i seguenti dati:

Numero di libri letti	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Numero di studenti	13	18	15	6	6	7	3	2	1	1	0

- Calcola le frequenze percentuali approssimando ai decimi e rappresentale con un istogramma.

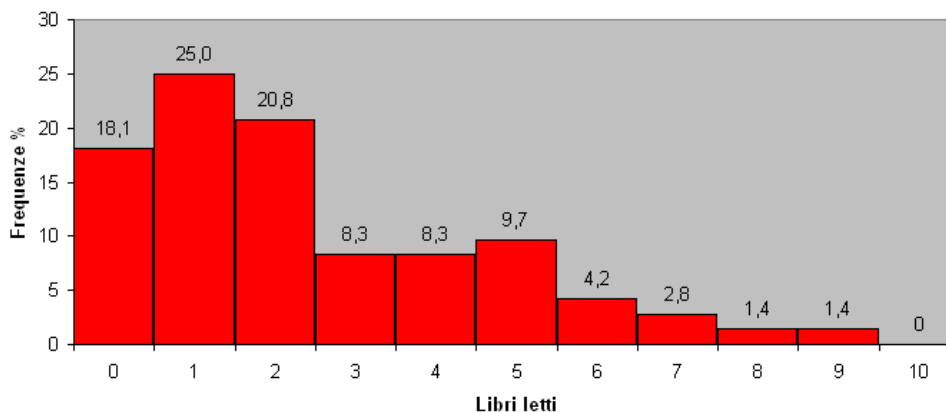
- Calcola la media, la moda e la mediana. Se necessario, approssima i valori ai decimi.
- Estraendo a caso uno studente qual è la probabilità che abbia letto almeno 4 libri?
- Estraendo a caso uno studente qual è la probabilità che abbia letto un numero di libri inferiore a 3?
- Fornisci un'interpretazione dei valori ottenuti per la media e la mediana.

Soluzione

a. Le frequenze percentuali sono:

Numero di libri letti	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	totale
Numero di studenti	13	18	15	6	6	7	3	2	1	1	0	72
Frequenze %	18,1	25,0	20,8	8,3	8,3	9,7	4,2	2,8	1,4	1,4	0	100

L'istogramma delle frequenze percentuali è:



b. La moda è “1 libro”, la mediana è “2 libri” e la media è “2,4 libri”. Il rapporto per il calcolo della media è $174/72$.

c. La probabilità di estrarre uno studente che abbia letto almeno quattro libri è $P = \frac{20}{72}$, cioè circa il 28 %.

d. La probabilità di estrarre uno studente che abbia letto meno di tre libri è $P = \frac{46}{72}$, cioè circa il 64 %.

e. La media ha un valore maggiore della mediana. Questo significa che più del 50 % dei ragazzi legge un numero di libri inferiore alla media.