VERIFICA DI MATEMATICA - 15 aprile 2024 classe 3ªD

Nome: ________________________ **Cognome:** ________________________

Algebra

1. Risolvi le seguenti equazioni e verifica la prima.

a) $1+\frac{5}{8}x+\frac{5(x-3)}{12}-\frac{3(x-2)}{4}=-\frac{x+6}{8}+\frac{1}{3}$

b) $-2(8x^2-4x+3)-(x-5)=-(4x+2)^2-10x$

Soluzione

a) $1+\frac{5}{8}x+\frac{5(x-3)}{12}-\frac{3(x-2)}{4}=-\frac{x+6}{8}+\frac{1}{3} \Rightarrow$

$\frac{24+15x+10x-30-18x+36}{24}=\frac{-3x-18+8}{24} \Rightarrow$

$15x+10x-18x+3x=-24+30-36-18+8 \Rightarrow 10x=-40 \Rightarrow x=-4$

Verifica:

$1-\frac{5}{2}-\frac{35}{12}+\frac{9}{2}=-\frac{1}{4}+\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{12-30-35+54}{12}=\frac{-3+4}{12} \Rightarrow \frac{1}{12}=\frac{1}{12}$

b) $-2(8x^2-4x+3)-(x-5)=-(4x+2)^2-10x \Rightarrow$

$-16x^2+8x-6-x+5=-16x^2-16x-4-10x \Rightarrow$

$8x-x+16x+10x=6-5-4 \Rightarrow 33x=-3 \Rightarrow x=-\frac{1}{11}$

2. Un agricoltore vende 45 kg di olive, incassando 93,50 euro. Se una parte di esse (x) è stata venduta a 1,90 euro al kg e la rimanente (y) a 2,15 euro al kg, quanti kg del primo (x) e del secondo tipo (y) sono stati venduti? Risolvi il problema con le equazioni.

Soluzione

Per risolvere il problema impostiamo le due equazioni seguenti:

$x+y=45 \Rightarrow y=45-x$

$1{,}90x+2{,}15y=93{,}50$

Da cui, $1{,}90x+2{,}15\cdot(45-x)=93{,}50 \Rightarrow x=13$ kg e $y=45-13=32$ kg.

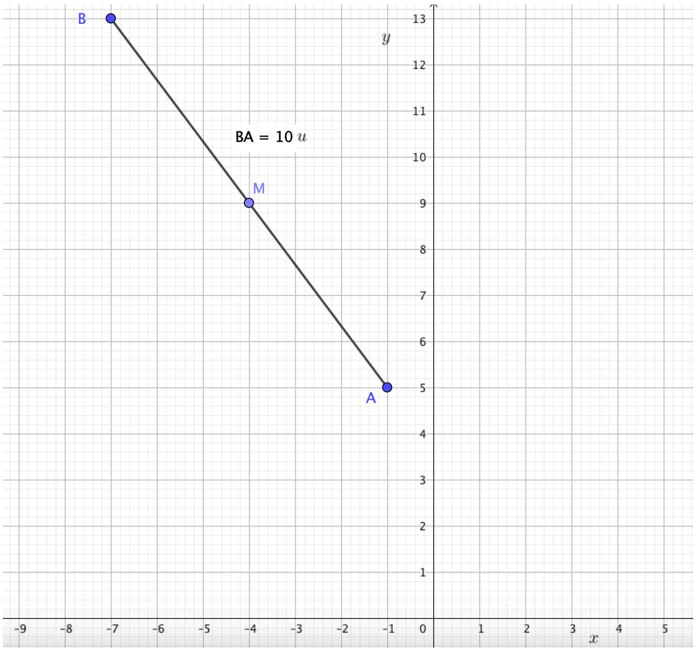
3. Dati i due punti $A(-1;5)$ e $B(-7;13)$, rappresentali sul piano cartesiano. Calcola la distanza tra i due punti. Calcola le coordinate del punto medio del segmento $\overline{AB}$ e verifica il risultato graficamente.

Soluzione

La distanza tra i due punti è $\overline{AB} = \sqrt{(-1+7)^2 + (5-13)^2} = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = 10$ u.

Le coordinate del punto medio sono: $x_M = \dfrac{-1-7}{2} = -4$ e $y_M = \dfrac{5+13}{2} = 9$, $M(-4; 9)$.

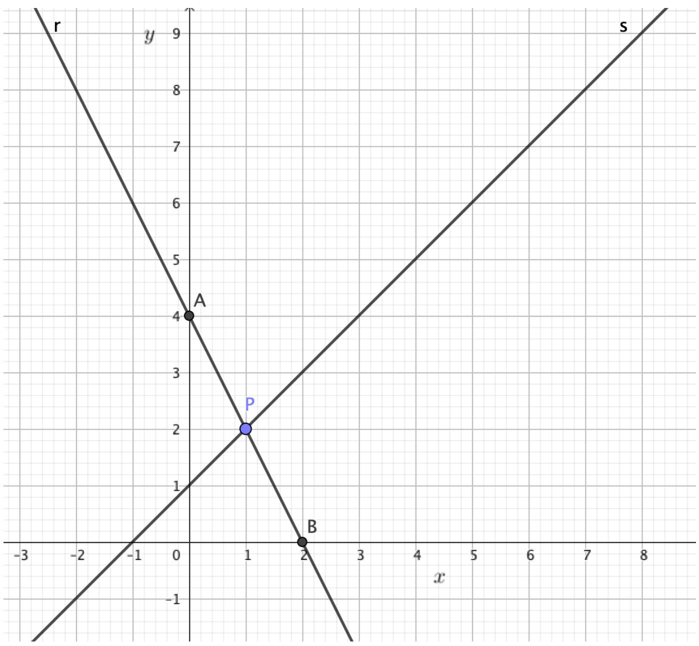
Verifica grafica.



4. Rappresenta sul piano cartesiano le rette di equazione r: $y = -2x + 4$ e s: $y = x + 1$. Trova algebricamente le coordinate del punto di intersezione tra le due rette e verifica il risultato graficamente. Trova graficamente e algebricamente le coordinate del punto di intersezione tra la retta r e l'asse delle ascisse e tra la retta r e l'asse delle ordinate.

Soluzione

Rappresentazione grafica delle rette.



Per trovare le coordinate del punto di intersezione tra le due rette si eguagliano le equazioni delle rette: $-2x+4=x+1 \Rightarrow -3x=-3 \Rightarrow x=1$ e $y=-2+4=1+1=2$, $P(1;2)$. Le coordinate del punto di intersezione della retta r con l'asse delle ordinate sono $A(0;4)$, infatti $x=0$ e $y=-2\times 0+4=4$. Le coordinate del punto di intersezione della retta r con l'asse delle ascisse sono $B(2;0)$, infatti $y=0$ e $0=-2x+4 \Rightarrow x=2$.

5. Utilizza i due metodi studiati per trovare l'equazione della retta r passante per i punti $A(-5;4)$ e $B(-1;-4)$. Scrivi l'equazione di una retta s parallela alla retta r e l'equazione di una retta t perpendicolare alla retta r.

Soluzione

Metodo con la formula.

$$\frac{y-4}{-4-4}=\frac{x+5}{-1+5} \Rightarrow 4(y-4)=-8(x+5) \Rightarrow 4y-16=-8x-40 \Rightarrow$$

$$4y=-8x+16-40 \Rightarrow 4y=-8x-24 \Rightarrow y=-2x-6$$

Metodo con il sistema lineare.

$$4=-5m+q \Rightarrow q=4+5m$$

$$-4=-m+q \Rightarrow -4=-m+4+5m \Rightarrow m=-2$$

e quindi $q=4+5m=4+5\times(-2)=-6$, da cui $y=-2x-6$.

Esempio di retta parallela a r, s: $y=-2x+3$

Esempio di retta perpendicolare a r, t: $y=\dfrac{1}{2}x-4$

6. Due automobili partono contemporaneamente da due punti di un'autostrada distanti tra loro 780 km, procedendo in senso inverso. Sapendo che il loro moto è uniforme ($s=vt$) e le velocità delle due automobili sono rispettivamente 120 km/h e 140 km/h, a quali distanze dalle posizioni iniziali si incontreranno? Risolvi il problema con le equazioni.

Soluzione

La somma delle distanze percorse dalle due automobili è $s_1+s_2=780$ km. Sappiamo che $s_1=v_1t$ e $s_2=v_2t$, dove $v_1=120$ km/h, $v_2=140$ km/h e t è il tempo necessario perché le due automobili si incontrino. Possiamo allora scrivere che $120t+140t=780 \Rightarrow t=3$ ore.

Da cui, $s_1=v_1t \Rightarrow s_1=120\times 3=360$ km e $s_2=v_2t \Rightarrow 140\times 3=420$ km.

Geometria

7. Una piramide retta, avente per base un rombo, ha il volume di 691,2 cm³. Il perimetro e una diagonale del rombo sono rispettivamente di 60 cm e 24 cm. Calcola la misura dell'altezza della piramide, l'area laterale e l'area totale.

Soluzione

Il lato del rombo di base misura $60 : 4 = 15$ cm. La metà della diagonale minore del rombo misura $\frac{d}{2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$ cm. La diagonale minore misura, quindi, 18 cm. L'area di base della piramide è $A_b = \frac{24 \times 18}{2} = 216$ cm². Il raggio della piramide è lungo (raggio della circonferenza inscritta nel rombo di base) $r = \frac{2A}{p} = \frac{2 \times 216}{60} = 7{,}2$ cm. L'altezza della piramide misura $h = \frac{691{,}2 \times 3}{216} = 9{,}6$ cm. L'apotema della piramide misura $a = \sqrt{7{,}2^2 + 9{,}6^2} = 12$ cm. L'area laterale della piramide è $A_L = \frac{60 \times 12}{2} = 360$ cm². L'area totale della piramide è $A_{TOT} = 360 + 216 = 576$ cm².

8. L'area totale e l'area di base di un cilindro sono rispettivamente $82{,}5\pi$ cm² e $6{,}25\pi$ cm². Calcola il volume e la massa del cilindro, sapendo che è fatto di legno ($d = 0{,}5$ g/cm³).

Soluzione

Il raggio della circonferenza di base misura $r = \sqrt{\frac{6{,}25\pi}{\pi}} = 2{,}5$ cm. L'area laterale del cilindro è $A_L = 82{,}5\pi - 2 \times 6{,}25\pi = 70\pi$ cm². La circonferenza di base misura $C = 2\pi \times 2{,}5 = 5\pi$ cm. L'altezza del cilindro misura $h = \frac{70\pi}{5\pi} = 14$ cm. Il volume del cilindro è $V = 6{,}25\pi \times 14 = 87{,}5\pi$ cm³. La massa del solido è $m = 87{,}5 \times 3{,}14 \times 0{,}5 \approx 137$ g.

9. L'area laterale di un cono è 1020π cm² e il diametro di base misura 60 cm. Calcola il volume del cono.

Soluzione

Il raggio di base misura $r = 60 : 2 = 30$ cm. L'apotema del cono misura $a = \frac{1020\pi}{30\pi} = 34$ cm.
L'altezza del cono misura $h = \sqrt{34^2 - 30^2} = 16$ cm.
Il volume del cono è $V = \frac{\pi \cdot 30^2 \cdot 16}{3} = 4800\pi$ cm³.

10. Un solido è formato da un cubo con lo spigolo di 18 cm in cui è presente una cavità a forma di cono profonda 12 cm. La circonferenza di base del cono è inscritta nel quadrato che corrisponde alla faccia del cubo. Calcola l'area totale del solido.

Soluzione

L'area totale del cubo è $A_{cubo} = 18^2 \times 6 = 1944$ cm². Il raggio del cono misura 9 cm. L'apotema del cono misura $a = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$ cm. L'area laterale del cono è $A_L cono = \pi \cdot 9 \cdot 15 = 135\pi$ cm². L'area totale del solido è $A_{TOT} = 1944 + 135 \times 3{,}14 - 9^2 \times 3{,}14 \approx 2113{,}56$ cm².

11. L'ipotenusa e un cateto di un triangolo rettangolo misurano 25 cm e 15 cm. Calcola l'area totale e il volume del solido che si ottiene facendo ruotare il triangolo di un giro completo attorno all'ipotenusa.

Soluzione

Si ottengono due coni con la base coincidente. Il cateto maggiore del triangolo misura $C = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20$ cm. L'altezza relativa all'ipotenusa del triangolo corrispondente al raggio di base dei due coni misura $h_i = r = \dfrac{15 \times 20}{25} = 12$ cm. L'area totale del solido è la somma delle due aree laterali, cioè $A_{TOT} = \pi \times 12 \times 15 + \pi \times 12 \times 20 = 420\pi$ cm². Il volume del solido è la somma dei volumi dei due coni, cioè $V_{TOT} = \dfrac{\pi \times 12^2 \times 25}{3} = 1200\pi$ cm³.

12. L'area della superficie totale di un cilindro è 1200π cm². Calcola il volume sapendo che il raggio è $\dfrac{3}{5}$ dell'altezza. Imposta un'equazione per risolvere il problema.

Soluzione

Possiamo indicare l'altezza del cilindro con x. Il raggio di base è quindi $r = \dfrac{3}{5}x$. L'area laterale la possiamo esprimere nella maniera seguente: $A_L = 2\pi \cdot \dfrac{3}{5}x \cdot x = \dfrac{6}{5}\pi x^2$. L'area di base si può esprimere come segue $A_b = \pi \cdot \left(\dfrac{3}{5}x\right)^2 = \dfrac{9}{25}\pi x^2$. L'area totale è, quindi, esprimibile come segue:

$$A_{TOT} = 2 \times \frac{9}{25}\pi x^2 + \frac{6}{5}\pi x^2 = \frac{18\pi + 30\pi}{25}x^2 = \frac{48\pi}{25}x^2 = 1200\pi \text{ cm}^2.$$

Da cui si ricava che $x^2 = 1200\pi \times \dfrac{25}{48\pi} = 625$ cm², cioè $x = h = 25$ cm e $r = \dfrac{3}{5} \times 25 = 15$ cm.

Il volume del cilindro è $V = \pi \cdot 15^2 \cdot 25 = 5625\pi$ cm³.